

Departamento de Ingeniería Matemática
 MA26B-03: Matemáticas Aplicadas
 Profesor: Pierre Guiraud
 Auxiliares: Raul Aliaga, Maximiliano Rojo

Clase Auxiliar 3

1. Problema 1

Demuestre que las fórmulas:

$$A_x(f) = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

$$A_y(f) = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Para las áreas de revolución de una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en torno al eje x e y respectivamente, son consistentes con la definición de área dada.

Demostración:

Lo primero es hacerse un dibujo de las superficies, y parametrizarlas adecuadamente (los dibujos quedan propuestos, para estimular la imaginación del estudiante):

- *Para el eje x:* Si “intercambiamos” mentalmente el eje x con el eje z , podemos escribir la superficie de revolución de f en torno a x (ahora z) como:

$$\vec{S}(z, \theta) = f(z)\hat{\rho} + z\hat{k} \quad (z, \theta) \in [a, b] \times [0, 2\pi]$$

Luego, usamos la definición de área que tenemos:

$$A(S) = \iint_S \left\| \frac{\delta \vec{S}}{\delta u} \times \frac{\delta \vec{S}}{\delta v} \right\| du dv$$

y calculamos:

$$\frac{\delta \vec{S}}{\delta \theta} = f(z)\hat{\theta} \quad \frac{\delta \vec{S}}{\delta z} = f'(z)\hat{\rho} + \hat{k}$$

$$\frac{\delta \vec{S}}{\delta \theta} \times \frac{\delta \vec{S}}{\delta z} = f'(z)f(z)\hat{\theta} \times \hat{\rho} + f(z)\hat{\theta} \times \hat{k} = f(z)[f'(z)\hat{k} + \hat{\rho}]$$

$$\Rightarrow \int_a^b \int_0^{2\pi} \left\| \frac{\delta \vec{S}}{\delta \theta} \times \frac{\delta \vec{S}}{\delta z} \right\| d\theta dz = \int_a^b 2\pi f(z) \sqrt{1 + f'(z)^2} dz$$

y como consideramos a x como z , recuperamos la fórmula que teníamos.

- *Para el eje y:* Ahora intercambiamos y con z, de este modo, la parametrización es:

$$\vec{S}(x, \theta) = x\hat{\rho} + f(x)\hat{k} \quad (x, \theta) \in [a, b] \times [0, 2\pi]$$

Igual que antes:

$$\frac{\delta \vec{S}}{\delta x} = \hat{\rho} + f'(x)\hat{k} \quad \frac{\delta \vec{S}}{\delta \theta} = x\hat{\theta}$$

$$\therefore \frac{\delta \vec{S}}{\delta x} \times \frac{\delta \vec{S}}{\delta \theta} = x\hat{k} + xf'(x)(-\hat{\rho}) \Rightarrow ||| = x\sqrt{1 + f'(x)^2}$$

$$\Rightarrow \int_a^b \int_0^{2\pi} x\sqrt{1 + f'(x)^2} \delta\theta \delta x = \int_a^b 2\pi x\sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

2. Problema 2

Calcule el área de la intersección entre $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + z^2 = a^2$

Solución:

Nuevamente, los dibujos quedan propuestos, como bien recordarán de la clase auxiliar, la manera de imaginar la superficie es como “una pelota de rugby”, pero no ovalada, (pues es “cuadrada” esta pelota), de todas maneras, podemos calcular el área, manipulando los términos que la definen apropiadamente, restando las ecuaciones:

$$x^2 + y^2 - x^2 - z^2 = 0 \Rightarrow (y + z)(y - z) = 0 \Rightarrow y = \pm z$$

de este modo la parametrización de la superficie es:

$$\vec{\sigma}(\theta, z) = a\hat{\rho} + z\hat{k} \quad (\theta, z) \in [0, 2\pi] \times [-a \cos(\theta), a \cos(\theta)]$$

Observamos que el rango al que pertenece z esta limitado por y, que vale $a \cos(\theta)$, y como la superficie es simétrica, podemos considerar $z > 0$ y $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, para después multiplicar el resultado obtenido por 8, así, calculando lo que corresponde:

$$\frac{\delta \vec{\sigma}}{\delta \theta} = a\hat{\theta} \quad \frac{\delta \vec{\sigma}}{\delta z} = \hat{k}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta \vec{\sigma}}{\delta \theta} \times \frac{\delta \vec{\sigma}}{\delta z} = a\hat{\rho} \Rightarrow ||| = a$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos(\theta)} a \delta z \delta \theta = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos(\theta) \delta \theta = a^2 \sin(\theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = a^2$$

Así, el valor del área requerida es $8a^2$.

3. Problema 3

Considere el paraboloide de ecuación $x^2 + y^2 + z = 4R^2$ con $R > 0$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 2Ry$. Calcule la superficie de la porción del cilindro que queda fuera del paraboloide.

Solución:

La ecuación del paraboloide la podemos reescribir como:

$$x^2 + y^2 = 4R^2 - z$$

Es decir, para cada z fijo, se tiene que la curva de nivel del paraboloide es la circunferencia centrada en cero, y de radio $\sqrt{4R^2 - z}$, con el eje z conteniendo los centros. Por otra parte, reescribiendo la ecuación del cilindro:

$$x^2 + y^2 - 2Ry + R^2 = R^2 \Rightarrow x^2 + (y - R)^2 = R^2$$

O sea, es un cilindro centrado en $(0, R)$, de radio R , con z arbitrario. Nuevamente, el dibujo queda propuesto, pero en terminos coloquiales, la porción que queda fuera del cilindro es como “una torre que emerge en el costado de una colina”.

Necesitamos saber en que momento el cilindro se sale del paraboloide, para ello, debemos ver la intersección entre las ecuaciones, restandolas:

$$x^2 + y^2 + z - x^2 - y^2 = 4R^2 - 2Ry \Rightarrow z = 4R^2 - 2Ry \Rightarrow z = 2R(2R - y)$$

usando coordenadas cilíndricas, las ecuaciones se escriben ahora como:

$$\rho^2 + z = 4R^2 \quad \rho^2 = 2R\rho \sin(\theta) \Rightarrow z = 2R(2R - \rho \sin(\theta))$$

Considerando que $\rho > 0$ tenemos que despejando ρ y z en función de θ :

$$\rho = 2R \sin(\theta) \quad z = 4R^2 - 4R^2 \sin^2(\theta) = 4R^2 \cos^2(\theta)$$

La parametrización resultante (no olvidemos, coordenadas cilíndricas: $x = \rho \cos(\theta)$ y $y = \rho \sin(\theta)$ y reemplazando en los resultados obtenidos):

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(z, \theta) &= (2R \sin(\theta) \cos(\theta), 2R \sin^2(\theta), z) \\ (z, \theta) &\in [4R^2 \cos^2(\theta), 4R^2] \times [0, \pi] \end{aligned}$$

Consideramos sólo hasta π , pues el cilindro vive según la parametrización con que contamos, en ese segmento para θ , ahora, calculamos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \vec{\sigma}}{\delta \theta} &= 2R \cos(\theta) \hat{\rho} + 2R \sin(\theta) \hat{\theta} \quad \frac{\delta \vec{\sigma}}{\delta z} = \hat{k} \\ \Rightarrow \quad \frac{\delta \vec{\sigma}}{\delta \theta} \times \frac{\delta \vec{\sigma}}{\delta z} &= -2R \cos(\theta) \hat{\theta} + 2R \sin(\theta) \hat{\rho} \end{aligned}$$

$$\left\| \frac{\delta \vec{\sigma}}{\delta \theta} \times \frac{\delta \vec{\sigma}}{\delta z} \right\| = 2R$$

por consiguiente, la integral:

$$\int_0^\pi \int_{4R^2 \cos(\theta)}^{4R^2} 2R \delta z \delta \theta = (2R)^3 \int_0^\pi \sin^2(\theta) \delta \theta = (2R)^3 \frac{\pi}{2} = 4\pi R^3$$

es el resultado que buscábamos.

4. Problema 4

Considere el campo $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por:

$$\vec{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$$

y la región Ω definida por:

$$x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad z \in [0, b] \quad x^2 + y^2 = a^2$$

con a y b constantes dadas, ambas positivas.

- a) Evalúe las integrales de flujo del campo sobre cada una de las 5 caras de la región. Haga un bosquejo y considere la orientación exterior.
- b) Interprete físicamente los 5 flujos calculados, así como el flujo total a través de Ω .

Solución:

Debido a la importancia de contar con una imagen de Ω , este dibujo no queda propuesto:

Recordamos la definición de flujo:

$$\iint_{\delta\Omega} \vec{F} \delta S = \iint_S (\vec{F}(\vec{\sigma}(u, v)) \bullet \hat{n}) \left\| \frac{\delta \vec{\sigma}}{\delta u} \times \frac{\delta \vec{\sigma}}{\delta v} \right\| \delta u \delta v$$

Con $\delta\Omega$ la superficie que encierra al volumen Ω , σ una parametrización de esa superficie, \vec{F} el campo y \hat{n} la normal en la que orientamos el campo (casi siempre usaremos la exterior).

Procedemos entonces a parametrizar convenientemente cada cara de Ω de modo de calcular el flujo en cada cara:

- \underline{L}_1 : parametrizamos un rectángulo, en $y = 0$:

$$\vec{\sigma}(x, z) = (x, 0, z) \quad (x, z) \in [0, a] \times [0, b]$$

y nuestra normal exterior es $\hat{n} = -\hat{j}$, luego:

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b (0, xz, 0) \bullet (-0, 1, 0) \delta x \delta z &= \int_0^a \int_0^b -xz \delta x \delta z \\ &= -\int_0^a x \frac{b^2}{2} \delta x = -\left(\frac{ab}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Lo que significa que dado como orientamos el flujo (exteriormente), a través de L_1 esta **entrando** flujo.

- \underline{L}_2 : parametrizamos un rectángulo, en $x = 0$:

$$\vec{\sigma}(y, z) = (0, y, z) \quad (y, z) \in [0, a] \times [0, b]$$

y nuestra normal exterior es $\hat{n} = -\hat{i}$, luego:

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b (yz, 0, 0) \bullet (-1, 0, 0) \delta y \delta z &= \int_0^a \int_0^b -yz \delta y \delta z \\ &= -\int_0^a y \frac{b^2}{2} \delta y = -\left(\frac{ab}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Lo que significa que dado como orientamos el flujo (exteriormente), a través de L_1 esta **entrando** flujo también.

- \underline{T}_1 : Usamos coordenadas cilíndricas:

$$\vec{\sigma}(r, \theta) = r\hat{\rho} + b\hat{k} \quad (\theta, r) \in [0, \frac{\pi}{2}][0, a]$$

y en este caso, nuestra normal exterior es \hat{k} , entonces nuestra integral:

$$\int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{r \cos(\theta)}_x \underbrace{r \sin(\theta)}_y \underbrace{r}_{|||} \delta \theta \delta r = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\theta) \sin(\theta)}{2} a^4 \delta \theta$$

Esto pues, las coordenadas del campo en los ejes x e y se anulan al hacer \bullet con la normal, se sigue que:

$$= -\frac{a^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\theta) \delta \theta = -\frac{a^4}{4} \left(\frac{\cos(2\theta)}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{a^4}{8}$$

- T_2 : Usamos coordenadas cilíndricas de nuevo:

$$\vec{\sigma}(r, \theta) = r\hat{\rho} \quad (\theta, r) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, a]$$

y en este caso, nuestra normal exterior es $-\hat{k}$, entonces nuestra integral, análogamente al caso anterior:

$$-\int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cos(\theta) \sin(\theta) \delta\theta \delta r = -\frac{a^4}{8}$$

Pues la integral es la misma salvo un signo. Este calculo podria haberse evitado, pues viendo los signos de ambos flujos calculados, en T_1 **sale** flujo, mientras que en T_2 **entra** flujo, por lo tanto, en suma se anulan, y esto es porque en ambas superficies, que son simétricas, el campo también es simétrico (pues no depende de z), luego solo diferirá lo calculado por los signos de las normales por las cuales orientamos el campo para calcular.

- Manto: Claramente, la buena idea es usar otra vez las coordenadas cilíndricas:

$$\vec{\sigma}(\theta, z) = a\hat{\rho} + z\hat{k} \quad (\theta, z) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, b]$$

podemos ver que geoméricamente, la normal exterior al manto es $\hat{\rho}$ (pero si se calcula también da), de este modo nuestra integral es:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^b (az \sin \theta, az \cos \theta, a^2 \sin \theta \cos \theta) \bullet (\cos \theta, \sin \theta, 0) a \delta z \delta \theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^b 2a^2 z \sin(\theta) \cos(\theta) \delta z \delta \theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 b^2 \sin(2\theta) \delta \theta = \frac{a^2 b^2}{2}$$

lo que significa que por el Manto, **sale** flujo, sumando a los flujos que entran por L_1 y L_2 , se obtiene que el flujo total a través de Ω es cero!.